

---

## ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΚΑΙ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ

Παράδοση 08-01-2019

---

### ΟΜΑΔΑ Ι – Απόλυτος Γεωμετρία

**Άσκηση 1** Έστω  $A$  και  $B$  διακεκριμένα σημεία. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο  $X$  έτσι ώστε  $A * X * B$ .

**Άσκηση 2** Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό ενός τριγώνου είναι μη κενό σύνολο.

**Άσκηση 3** Έστω τρίγωνο  $ABC$  και  $D$  ένα σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Ας υποθέσουμε ότι  $\ell$  είναι μια ευθεία που διέρχεται από το  $D$ . Δείξτε ότι η ευθεία  $\ell$  τέμνει δύο πλευρές του τριγώνου.

**Άσκηση 4** Να αποδείξετε ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μία κάθετη πλευρά και την υποτείνουσα αντίστοιχα ίσες είναι ίσα.

**Άσκηση 5** Να αποδείξετε ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μία κάθετη πλευρά και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες είναι ίσα.

**Άσκηση 6** Θεωρούμε στο Καρτεσιανό επίπεδο  $\mathbb{R}^2$  ως ευθείες τα υποσύνολα

$$\ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c \text{ με } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ και } a^2 + b^2 \neq 0\}.$$

Για τυχόντα σημεία  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  και  $C(c_1, c_2)$  ορίζουμε  $A * B * C$  αν και μόνο αν τα  $A, B, C$  είναι συνευθειακά και ο αριθμός  $b_1$  είναι μεταξύ  $a_1$  και  $c_1$  ή ο αριθμός  $b_2$  είναι μεταξύ  $a_2$  και  $c_2$ . Εξετάστε αν τα αξιώματα διάταξης επαληθεύονται.

**Άσκηση 7** Θεωρούμε το Καρτεσιανό επίπεδο  $\mathbb{R}^2$  όπου οι ευθείες και η σχέση της διάταξης έχει οριστεί όπως στην παραπάνω άσκηση. Ορίζουμε ως απόσταση των δύο σημείων  $A(a_1, a_2)$  και  $B(b_1, b_2)$  να είναι ο αριθμός:

$$d(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$

Θα λέμε ότι δύο τμήματα  $AB$  και  $CD$  είναι ίσα όταν  $d(A, B) = d(C, D)$ . Εξετάστε αν τα αξιώματα ισότητας επαληθεύονται. Τι παριστάνει το σύνολο των σημείων που απέχει απόσταση 1 από την αρχή  $O(0, 0)$ ;

**ΟΜΑΔΑ II – Κυκλικές αντιστροφές και ομοιοθεσίες**

**Άσκηση 8** Δοθέντος μη μηδενικού αριθμού  $k$  και σημείου  $A(x_0, y_0)$  του επιπέδου, η απεικόνιση  $\Theta_{A,\lambda}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  με τύπο

$$\Theta_{A,\lambda}(x, y) = (x_0 + \lambda(x - x_0), y_0 + \lambda(y - y_0)),$$

ονομάζεται **ομοιοθεσία** κέντρου  $A$  και **λόγου**  $\lambda$ . Να αποδείξετε ότι:

- (α) Η σύνθεση δύο ομοιοθεσιών με ίδιο κέντρο είναι ξανά ομοιοθεσία. Τι είναι οι σύνθεση δύο ομοιοθεσιών με διαφορετικά κέντρα;
- (β) Ο αντίστροφος μετασχηματισμός μιας ομοιοθεσίας είναι ξανά ομοιοθεσία.
- (γ) Μια ομοιοθεσία μετασχηματίζει ευθεία σε ευθεία και κύκλο σε κύκλο.

**Άσκηση 9** Έστω  $K_1, K_2$  ομόκεντροι κύκλοι και  $C_1, C_2$  οι αντίστοιχες αντιστροφές. Να αποδείξετε ότι οι συνθέσεις  $C_1 \circ C_2$  και  $C_2 \circ C_1$  είναι ομοιοθεσίες.

**Άσκηση 10** Έστω  $K$  ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων του  $\mathbb{R}^2$ . Θεωρούμε τις ευθείες  $\ell_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}$  και  $\ell_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2\}$ . Να βρεθούν οι αντιστροφές ως προς τον κύκλο  $K$  των εν λόγω ευθειών.

**Άσκηση 11** Έστω κύκλος  $K$  με κέντρο την αρχή των αξόνων του  $\mathbb{R}^2$  και ακτίνα 4. Να βρεθεί η αντιστροφή ως προς τον  $K$  του

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 9\}.$$

**Άσκηση 12** Έστω  $P$  και  $Q$  αντίστροφα των σημείων  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα, ως προς έναν κύκλο  $K$  με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R$ . Να αποδείξετε ότι η (ευκλείδεια) απόσταση των σημείων  $P$  και  $Q$  δίνεται από τον τύπο

$$|PQ| = \frac{R^2 \cdot |AB|}{|OA| \cdot |OB|}.$$

**Άσκηση 13** Θεωρούμε την  $Y$ -ευθεία του  $\mathbb{H}^2$  με εξίσωση  $x = 2$  και τα σημεία της  $A(2, 1)$  και  $B(2, 5)$ . Να βρεθεί το  $Y$ -μέσο του  $Y$ -τμήματος  $AB$ .

**ΟΜΑΔΑ ΙΙΙ – Υπερβολική Γεωμετρία**

**Άσκηση 14** Δίνεται ο Υ-κύκλος με εξίσωση  $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ . Να βρεθεί το Υ-κέντρο και η Υ-ακτίνα του.

**Άσκηση 15** Θεωρούμε την Υ-ευθεία του  $\mathbb{H}^2$  με εξίσωση  $(x - 5)^2 + y^2 = 20$  και τα σημεία της  $A(1, 2)$  και  $B(3, 4)$ . Να βρεθεί το Υ-μέσο του Υ-τμήματος  $AB$ .

**Άσκηση 16** Δίνονται τα Υ-σημεία  $A = (0, 4)$ ,  $B = (0, 1)$  και  $C = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ .

- (α) Να σχεδιαστεί το Υ-τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $C$ .
- (β) Να υπολογισετε τις γωνίες και τα μήκη των πλευρών του Υ-τριγώνου  $ABC$ .  
Με πόσο ισούται το άθροισμα των γωνιών του Υ-τριγώνου  $ABC$ ;
- (γ) Προκύπτει κάποια διαφορά με το (ευκλείδειο) Πυθαγόρειο Θεώρημα;

**Άσκηση 17** Βρείτε την εξίσωση της Υ-ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(3, 4)$  και είναι κάθετη στην Υ-ευθεία με εξίσωση  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $y > 0$ .

**Άσκηση 18** Δίνονται τα Υ-σημεία  $A(0, 1)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(3, 6)$  και  $D(3, 3)$ . Ναδειχθεί ότι  $d(A, B) = d(C, D)$ . Βρείτε Υ-ισομετρία η οποία απεικονίζει το Υ-τμήμα  $AB$  στο Υ-τμήμα  $CD$ . Πόσες τέτοιες ισομετρίες υπάρχουν;

**Άσκηση 19** Δίνονται τα Υ-σημεία  $A(0, 1)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(0, 4)$  και  $D(1, \sqrt{3})$ . Δείξτε ότι τα τρίγωνα  $ABD$  και  $CBD$  είναι Υ-ίσα. Βρείτε Υ-ισομετρία η οποία απεικονίζει το ένα επί του άλλου.

**Σημείωση:** Για να παραλάβω την εργασία θα πρέπει να έχετε λύσει τουλάχιστον 4 ασκήσεις από την ΟΜΑΔΑ Ι, τουλάχιστον 3 ασκήσεις από την ΟΜΑΔΑ ΙΙ και τουλάχιστον 3 ασκήσεις από την ΟΜΑΔΑ ΙΙΙ.